ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 1:
Logica Matematica

1.2 Sintassi della logica proposizionale

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

5 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca"

Linguaggio: Sintassi e Semantica

I **linguaggi** sono dotati di (almeno) questi due aspetti:

- **Sintassi**: "struttura" delle espressioni linguistiche
- **Semantica**: "significato" delle espressioni linguistiche

Esempi (Sintassi del linguaggio naturale)

- "Il prato e fiorito" (sintatticamente **scorretta**)
- "Il prato è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il gatto è fiorito" (sintatticamente **corretta**)
- "Il lonfo non vaterca" (sintatticamente **scorretta**)

Alfabeto

- Linguaggio proposizionale $\mathcal{L}_\Sigma$ costruito su un alfabeto Σ

Alfabeto

- Linguaggio proposizionale $\mathcal{L}_\Sigma$ costruito su un alfabeto Σ

Definizione: Alfabeto

Un alfabeto Σ è costituito da

- I connettivi proposizionali: $\neg$ (unario) e $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (binari);
- Le costanti proposizionali: $\top$ (vero) e $\bot$ (falso);
- Un insieme non vuoto (finito o numerabile) di *simboli proposizionali* o *atomi* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$;
- I simboli separatori: "(" e ")".

Alfabeto

- Linguaggio proposizionale $\mathcal{L}_\Sigma$ costruito su un alfabeto Σ

Definizione: Alfabeto

Un alfabeto Σ è costituito da

- I connettivi proposizionali: $\neg$ (unario) e $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (binari);
- Le costanti proposizionali: $\top$ (vero) e $\bot$ (falso);
- Un insieme non vuoto (finito o numerabile) di *simboli proposizionali* o *atomi* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$;
- I simboli separatori: "(" e ")".

- Gli atomi (A) e gli atomi negati ($\neg A$) sono detti *letterali*.
- Quando Σ è chiaro dal contesto, invece di $\mathcal{L}_\Sigma$, scriveremo semplicemente $\mathcal{L}$.

Formule ben formate

- Definiamo le *formule* del linguaggio $\mathcal{L}$:

Formule ben formate

- Definiamo le *formule* del linguaggio $\mathcal{L}$:

Definizione: Formule ben formate

L'insieme delle *formule ben formate* o semplicemente *formule* del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è l'insieme definito induttivamente:

1. Le costanti e i simboli proposizionali sono formule
2. Se α è una formula, allora $(\neg\alpha)$ è una formula
3. Se $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e se α e β sono formule, allora $(\alpha \circ \beta)$ è una formula

Formule ben formate

- Definiamo le *formule* del linguaggio $\mathcal{L}$:

Definizione: Formule ben formate

L'insieme delle *formule ben formate* o semplicemente *formule* del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è l'insieme definito induttivamente:

1. Le costanti e i simboli proposizionali sono formule
2. Se α è una formula, allora $(\neg\alpha)$ è una formula
3. Se $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e se α e β sono formule, allora $(\alpha \circ \beta)$ è una formula

- Una formula ben formata del linguaggio proposizionale è detta *proposizione* o *enunciato proposizionale*.

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B
- $(\neg B)$

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B
- $(\neg B)$
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B
- $(\neg B)$
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$
- $(A \wedge (\neg B))$

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B
- $(\neg B)$
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$
- $(A \wedge (\neg B))$
- $(\neg(A \vee B))$

Esempio di formule ben formate

Esempio

Siano A e B dei simboli proposizionali. Allora le seguenti espressioni sono formule ben formate:

- $\top$, $\bot$, A, B
- $(\neg B)$
- $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$
- $(A \wedge (\neg B))$
- $(\neg(A \vee B))$
- $((A \rightarrow B) \vee ((\neg A) \leftrightarrow (\neg B)))$

Esempio di formule ben formate

Esercizio

Siano A, B e C dei simboli atomici. Determinare se le seguenti espressioni sono formule ben formate

1. $(\neg(\neg A) \vee B)$
2. $(A \vee C)$
3. $((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
4. $(A \wedge (B \vee C))$
5. $((\neg A) \vee (\neg(\neg B)))$
6. $(\neg \wedge A)$

Sottoformule

- Data una formula ben formata α, ogni formula ben formata β che appare come componente di α è detta *sottoformula* di α.
- Definiamo più precisamente il concetto di *sottoformula*

Sottoformule

- Data una formula ben formata α, ogni formula ben formata β che appare come componente di α è detta *sottoformula* di α.
- Definiamo più precisamente il concetto di *sottoformula*

Definizione: **Sottoformula**

Sia α una formula ben formata, l'insieme delle sottoformule di α è definito induttivamente come segue:

1. Se A è un atomo, allora A stessa è la sua sottoformula.
2. Se α è una formula del tipo $(\neg\beta)$, allora le sottoformule di α sono α stessa e le sottoformule di β.
3. Se α è una formula del tipo $(\beta \circ \gamma)$, allora le sottoformule di α sono α stessa e le sottoformule di β e γ.

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \land B)$ ha come sottoformule:

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge B)$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge B)$, A, B

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge B)$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge B)$, A, B

Esempio 2

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge (\neg B))$ ha come sottoformule:

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge B)$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge B)$, A, B

Esempio 2

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge (\neg B))$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge (\neg B))$, A, $(\neg B)$, B

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge B)$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge B)$, A, B

Esempio 2

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge (\neg B))$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge (\neg B))$, A, $(\neg B)$, B

Esempio 3

Siano A, B e C atomi, la formula $\alpha = (A \wedge (\neg(B \vee (\neg C))))$ ha come sottoformule:

Esempi di sottoformule

Esempio 1

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge B)$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge B)$, A, B

Esempio 2

Siano A e B atomi, la formula $(A \wedge (\neg B))$ ha come sottoformule:

- $(A \wedge (\neg B))$, A, $(\neg B)$, B

Esempio 3

Siano A, B e C atomi, la formula $\alpha = (A \wedge (\neg(B \vee (\neg C))))$ ha come sottoformule:

- α, A, $(\neg(B \vee (\neg C)))$, $(B \vee (\neg C))$, B, $(\neg C)$, C

Esempi di sottoformule

Esempio

Le sottoformule della formula $((A \leftrightarrow B) \vee (\neg C))$ sono le seguenti:

Esempi di sottoformule

Esempio

Le sottoformule della formula $((A \leftrightarrow B) \vee (\neg C))$ sono le seguenti:

- A
- B
- C
- $(A \leftrightarrow B)$
- $(\neg C)$
- $((A \leftrightarrow B) \vee (\neg C))$

Esempi di sottoformule

Esempio

Le sottoformule della formula $(A \leftrightarrow (B \vee (\neg C)))$ sono le seguenti:

Esempi di sottoformule

Esempio

Le sottoformule della formula $(A \leftrightarrow (B \vee (\neg C)))$ sono le seguenti:

- A
- B
- C
- $(\neg C)$
- $(B \vee (\neg C))$
- $(A \leftrightarrow (B \vee (\neg C)))$

Precedenza dei connettivi

- Esempi: $((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C)))$;
  $(A \vee (B \vee (C \vee (D \vee (E \vee F)))))$

Precedenza dei connettivi

- Esempi: $((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C)))$; $(A \vee (B \vee (C \vee (D \vee (E \vee F)))))$
- **Troppe parentesi!**
- Possiamo diminuirle, stabilendo una precedenza tra i connettivi ed un ordine di associazione nel caso di uno stesso connettivo.

Precedenza dei connettivi

- Esempi: $((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C)))$; $(A \vee (B \vee (C \vee (D \vee (E \vee F)))))$
- **Troppe parentesi!**
- Possiamo diminuirle, stabilendo una precedenza tra i connettivi ed un ordine di associazione nel caso di uno stesso connettivo.

Definizione: Precedenza dei connettivi

Per le formule proposizionali si usa la seguente convenzione:

$$\neg \prec \wedge \prec \vee \prec \rightarrow \prec \leftrightarrow$$

Il simbolo $\prec$ è l'operatore di precedenza.
A parità di precedenza (presenza di più occorrenze di uno stesso connettivo) si associa a destra.

Esempi di parentesizzazione

Alcuni esempi

- La formula $A \to B \to C$ diventa
- La formula $\neg A \wedge \neg B \to C \wedge D \wedge E$ diventa
- La formula $\neg A \wedge (\neg B \to C) \wedge D \wedge E$ diventa

Esempi di parentesizzazione

Alcuni esempi

- La formula $A \rightarrow B \rightarrow C$ diventa $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- La formula $\neg A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge D \wedge E$ diventa
- La formula $\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C) \wedge D \wedge E$ diventa

Esempi di parentesizzazione

Alcuni esempi

- La formula $A \to B \to C$ diventa
  $(A \to (B \to C))$
- La formula $\neg A \wedge \neg B \to C \wedge D \wedge E$ diventa
  $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \to (C \wedge (D \wedge E)))$
- La formula $\neg A \wedge (\neg B \to C) \wedge D \wedge E$ diventa

Esempi di parentesizzazione

Alcuni esempi

- La formula $A \to B \to C$ diventa
  $(A \to (B \to C))$
- La formula $\neg A \land \neg B \to C \land D \land E$ diventa
  $(((\neg A) \land (\neg B)) \to (C \land (D \land E)))$
- La formula $\neg A \land (\neg B \to C) \land D \land E$ diventa
  $((\neg A) \land (((\neg B) \to C) \land (D \land E)))$

Elementi basilari di Teoria dei Grafi

- Un **grafo** è una struttura composta da nodi e da archi che connettono due nodi. Ad esempio (a, b) indica l'arco che parte dal nodo a e giunge al nodo b.
- Un **nodo sorgente** è un nodo che non ha archi entranti.
- Un **albero** è un grafo senza cicli con un solo nodo sorgente (detto **radice** dell'albero) in cui ogni nodo diverso dalla radice ha un solo arco entrante.
- I nodi di un albero privi di archi uscenti sono detti **foglie**
- Per analogia agli alberi genealogici, i nodi intermedi sono detti **padre**, **figli**, **fratelli**, **discendenti**, **avi**.
- Un **albero binario** è un albero in cui ogni nodo ha al massimo due figli.

Albero sintattico

Definizione: **Albero sintattico**

Un albero sintattico $\mathcal{T}$ è un albero binario coi nodi etichettati da simboli di $\mathcal{L}$, che rappresenta la scomposizione di una formula ben formata α come segue:

1. Se α è una formula ben formata atomica, l'albero binario che la rappresenta è costituito dal solo nodo etichettato con α.
2. Se $\alpha = \beta \circ \gamma$, allora α è rappresentata dall'albero binario che ha la sua radice etichettata con $\circ$ e i cui figli sinistro e destro sono rispettivamente la rappresentazione di β e γ.
3. Se $\alpha = \neg\beta$, allora α è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con $\neg$ ed un unico figlio che è la rappresentazione di β.

Albero sintattico

Definizione: **Albero sintattico**

Un albero sintattico $\mathcal{T}$ è un albero binario coi nodi etichettati da simboli di $\mathcal{L}$, che rappresenta la scomposizione di una formula ben formata α come segue:

1. Se α è una formula ben formata atomica, l'albero binario che la rappresenta è costituito dal solo nodo etichettato con α.
2. Se $\alpha = \beta \circ \gamma$, allora α è rappresentata dall'albero binario che ha la sua radice etichettata con $\circ$ e i cui figli sinistro e destro sono rispettivamente la rappresentazione di β e γ.
3. Se $\alpha = \neg\beta$, allora α è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con $\neg$ ed un unico figlio che è la rappresentazione di β.

- L'albero sintattico rappresenta in modo **univoco** la struttura della formula ben formata.
- Tutti i *nodi intermedi* sono etichettati con **connettivi**, mentre i *nodi foglia* con **atomi**.

Albero sintattico

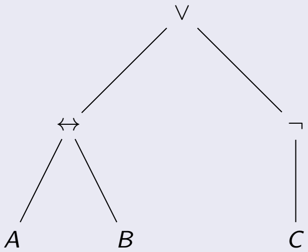
Esempio 1

L'albero sintattico della formula $(A \leftrightarrow B) \vee \neg C$ è il seguente:

Albero sintattico

Esempio 1

L'albero sintattico della formula $(A \leftrightarrow B) \vee \neg C$ è il seguente:



Albero sintattico

Esempio 2

L'albero sintattico della formula $A \leftrightarrow B \vee \neg C$ è il seguente:

Albero sintattico

Esempio 2

L'albero sintattico della formula $A \leftrightarrow B \vee \neg C$ è il seguente: